UNIVERSIDAD DE LOS ANDES VENEZUELA

FACULTAD DE INGENIERIA
MECÁNICA RACIONAL 20

TEMA 3

MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

ING. MARIÁNGEL PÉREZ GUERRERO

CONTENIDO:

1. INTRODUCCIÓN

Cinemática

Vectores: Posición, Velocidad, Aceleración

Escalares: Distancia, Rapidez, Tiempo

+

Cinética

Relaciones de Cinemática

+

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

=

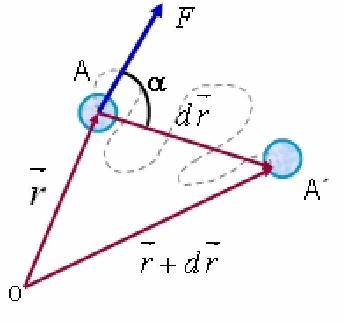
Métodos Adicionales:

Principio del Trabajo y la Energía (F, m, v, x)

Método del Impulso y la Cantidad de Movimiento (F, m, v, t)

2. TRABAJO PRODUCIDO POR UNA FUERZA

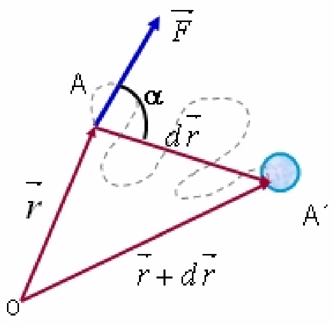
Una partícula se mueve desde A hasta A´. Suponiendo que $\vec{F}$ es una fuerza que actúa sobre la partícula:



El trabajo realizado por la **fuerza F** correspondiente al **desplazamiento dr** se define como:

$$\boxed{du = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

2. TRABAJO PRODUCIDO POR UNA FUERZA



$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$du = F ds \cos\alpha$$

Siendo el Trabajo una **cantidad escalar**, tiene magnitud y signo, pero no dirección.

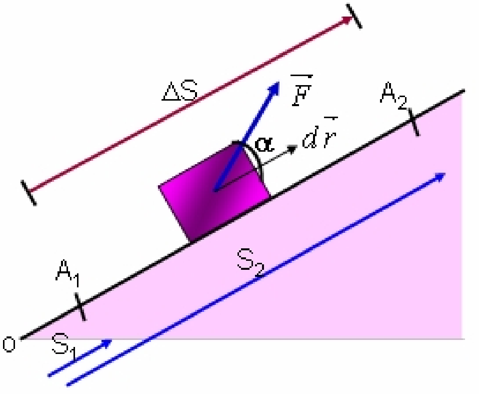
Unidades del trabajo de una fuerza:

Sistema Inglés → ft.lb ó in.lb

Sistema internacional → N.m = Joule (J)

3. TRABAJO PRODUCIDO POR UNA FUERZA CONSTANTE EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO

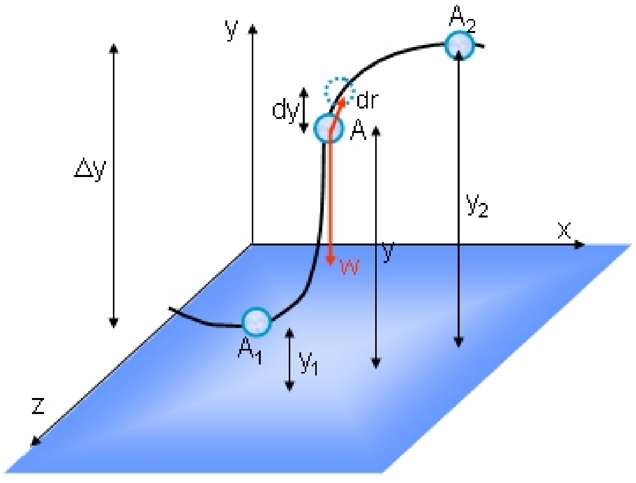
Si una partícula se mueve en línea recta sujeta a una fuerza F constante en magnitud y dirección:



$$\boxed{U_{1\rightarrow 2} = F\,\Delta S \cos\alpha}$$

<u>Tarea</u>: Demuestre que se llega al mismo resultado si se utilizan las componentes de F.

4. TRABAJO PRODUCIDO POR UN PESO (Ó TRABAJO PRODUCIDO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD)



$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

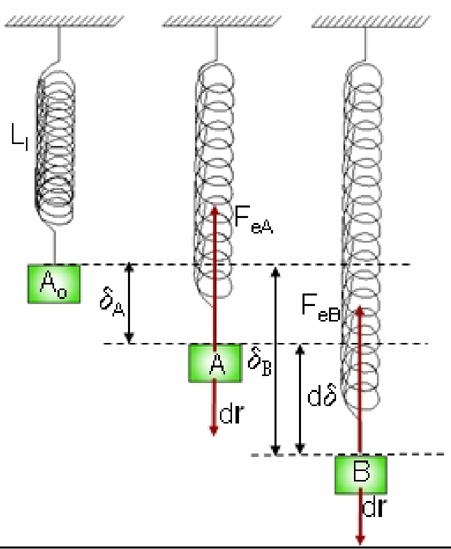
$$\vec{F} = 0\,\vec{i} - w\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\boxed{U_{1\to 2} = -w\Delta y}$$

Cuando el Trabajo es positivo y cuando negativo?

5. TRABAJO DE LA FUERZA EJERCIDA POR UN RESORTE (Ó TRABAJO PRODUCIDO POR UNA FUERZA ELÁSTICA)



El trabajo de la fuerza ejercida por el resorte durante un desplazamiento finito desde A hasta B es:

$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$du = F_e\, ds \cos 180° = -F_e ds$$

$$\int_A^B du = \int_{\delta_A}^{\delta_B} -K\delta\, d\delta \Rightarrow U_{A\to B} = -K\left[\frac{\delta^2}{2}\right]_{\delta_A}^{\delta_B}$$

$$\boxed{U_{A\to B} = -\frac{K}{2}\left(\delta_B^2 - \delta_A^2\right)}$$

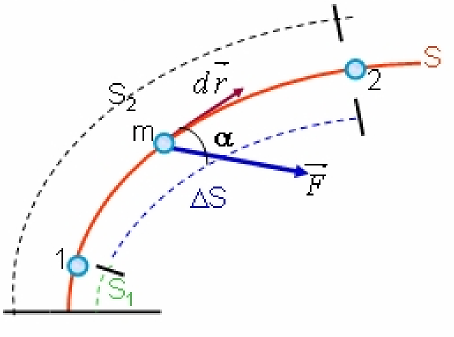
Tarea 4:

Encuentre el Trabajo producido por la fuerza Normal (N)

Obtenga una expresión del Trabajo producido por una fuerza P cualquiera

Obtenga la expresión del Trabajo producido por la fuerza de roce (Fr)

6. ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA



Supongamos una partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria S.

$$\boxed{U_{1\to 2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} \qquad \text{Ec. A}$$

La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ es una cantidad escalar y representa la ***Energía Cinética de la partícula*** y suele denotarse por T, entonces:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2} \qquad \textit{(Energía Cinética de la partícula)}$$

6. ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Ahora la ec. A puede escribirse como:

$$\boxed{U_{1\to 2} = T_2 - T_1} \quad \text{Ec. B}$$

Principio del Trabajo y la Energía:

$$\boxed{U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \quad \acute{o} \quad U_{1\to 2} = \Delta T}$$

6. ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Observaciones:

- Cuando actúan varias fuerzas sobre la partícula, U_{1-2} representa el **trabajo total de todas las fuerzas** y se obtiene sumando algebraicamente el trabajo de cada una:

$$T_1 + \sum U_{1\to 2} = T_2$$

- Para un sistema de partículas:

$$\sum T_1 + \sum U_{1\to 2} = \sum T_2$$

7. POTENCIA Y EFICIENCIA

La **Potencia** es la razón respecto al tiempo con que se efectúa un trabajo.

$$Potencia\ promedio = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad Potencia = \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{Potencia = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

(Potencia instantánea)

7. POTENCIA Y EFICIENCIA

$$\boxed{Potencia = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Unidades de Potencia:

Sistema Inglés $\longrightarrow$ ft.lb/s

en caballos de potencia (hp):

1 hp = 550 ft.lb/s

Sistema internacional $\longrightarrow$ N.m/s = J/s = W (Watt)

7. POTENCIA Y EFICIENCIA

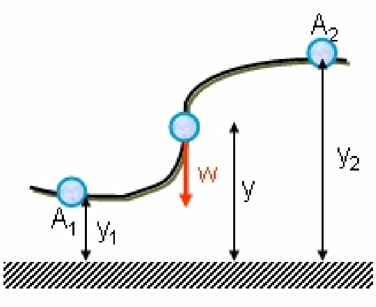
La **Eficiencia** ó eficiencia mecánica de una máquina, es la relación entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada, suponiendo que el trabajo se realiza a una razón constante:

$$\eta = \frac{Trabajo\ de\ Salida}{Trabajo\ de\ Entrada} = \frac{du/dt(salida)}{du/dt(entrada)}$$

$$\boxed{\eta = \frac{Potencia\ \ de\ Salida}{Potencia\ \ de\ Entrada} < 1}$$

TEMA 3: MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

8. ENERGÍA POTENCIAL (V)



Recordando el trabajo de un peso:

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1)$$
$$U_{1\to 2} = Wy_1 - Wy_2$$

El trabajo de W no depende de la trayectoria seguida sino de la función **W.y**

A **W.y** se le llama **Energía Potencial** del cuerpo respecto a la fuerza de gravedad W, y se denota por **Vg**:

$$\boxed{U_{1\to 2} = (Vg)_1 - (Vg)_2}$$

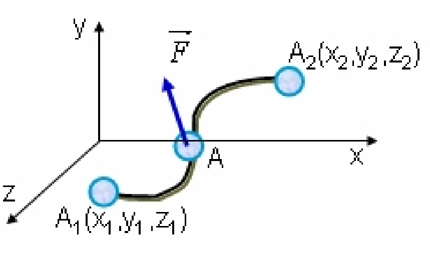
ING. MARIÁNGEL PÉREZ GUERRERO

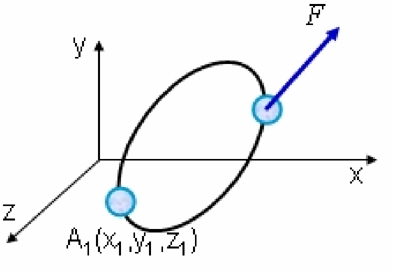
8. ENERGÍA POTENCIAL (V)

Observaciones:

- $(Vg)_1 - (Vg)_2$ Representa el cambio en la energía potencial.
- Se asume que W del cuerpo permanece constante.
- En Mecánica, es importante estudiar 2 clases de energía Potencial:
  - La energía potencial debida a la fuerza de gravedad
  - La energía potencial debida a una fuerza elástica Tarea

9. FUERZAS CONSERVATIVAS





Una fuerza F que actúa sobre una partícula A, es conservativa si su trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ es independiente de la trayectoria seguida por la partícula al moverse desde 1 hasta 2. Otra forma de definir una **Fuerza Conservativa**, es como aquella que depende sólo de las condiciones iniciales y finales del movimiento.

Ejemplo:

- ☑ El peso
- ☑ La fuerza elástica

9. FUERZAS CONSERVATIVAS

Recordando que el trabajo de una fuerza es el cambio en la energía potencial:

$$U_{1\rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$

Donde $V(x, y, z)$ es la Energía Potencial ó función potencial de F.

$$\boxed{U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2}$$

10. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Recordemos que el trabajo de una fuerza es igual al cambio en la energía potencial:

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 = \Delta V$$

También por el principio del Trabajo y la Energía: $U_{1\rightarrow 2} = T_2 - T_1$

es aplicable a una fuerza conservativa, por lo tanto:

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

10. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

"Cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la **Energía Cinética** y de la **Energía Potencial** de la partícula permanece constante"

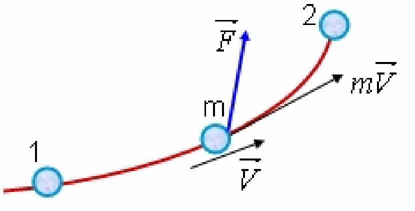
T+V representa la **Energía Mecánica Total** de la partícula y se denota por E:

$$\boxed{E = T + V}$$

Se cumple entonces que $E_1 = E_2$ …

"La **Energía Mecánica Total** de la partícula se conserva"

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL



Si sobre una partícula de masa m actúa una fuerza F, la 2da ley de Newton establece:

$$\overline{F} = \frac{d(m\overline{v})}{dt}$$

$$\boxed{m\overline{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}\,dt = m\overline{v}_2}$$ Ec. A

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL

$\int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt$ Es el IMPULSO LINEAL ó impulso de la fuerza F durante el intervalo de tiempo considerado.

$$\boxed{\overline{\text{Imp}}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt}$$

La Ec. A puede escribirse entonces como:

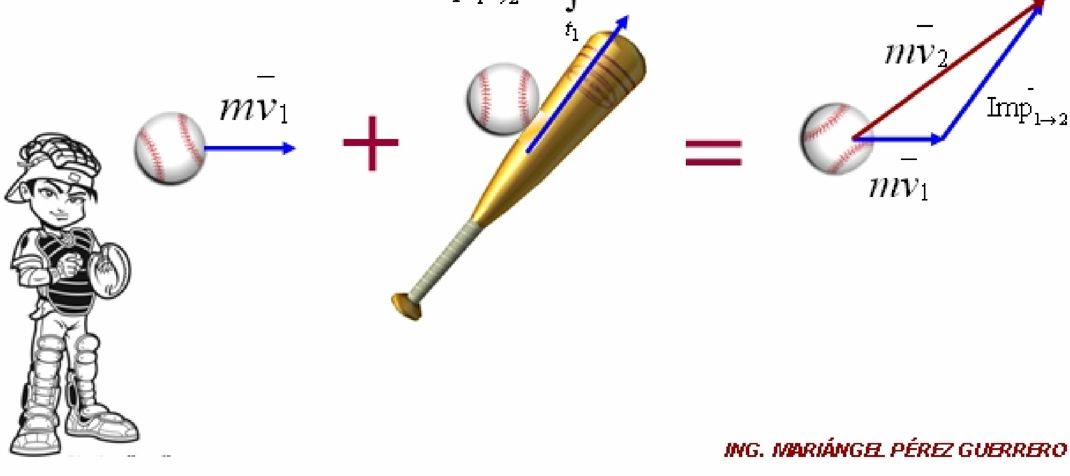
$$\boxed{m\vec{v}_1 + \overline{\text{Imp}}_{1\to 2} = m\vec{v}_2} \quad \text{Ec. B}$$

TEMA 3: MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL

Ejemplo:

$$\overline{\text{Imp}}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt$$



ING. MARIÁNGEL PÉREZ GUERRERO

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL

11.1 COMPONENTES RECTANGULARES

Siendo $\overline{\text{Imp}}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt$ se puede escribir:

$$\overline{\text{Imp}}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} Fxdt\ \overline{i} + \int_{t_1}^{t_2} Fydt\ \overline{j} + \int_{t_1}^{t_2} Fzdt\ \overline{k}$$

Principio del Impulso y Cantidad de Movimiento (solución analítica):

$$\boxed{\begin{aligned} (mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} Fxdt &= (mv_x)_2 \\ (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} Fydt &= (mv_y)_2 \\ (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} Fzdt &= (mv_z)_2 \end{aligned}}$$

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL

Observaciones:

- Cuando actúan varias fuerzas sobre la partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas:

$$m\vec{v}_1 + \sum \overrightarrow{\text{Imp}}_{1\to 2} = m\vec{v}_2$$

- Si intervienen 2 ó más partículas:

$$\sum m\vec{v}_1 + \sum \overrightarrow{\text{Imp}}_{1\to 2} = \sum m\vec{v}_2$$

11. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y MOMENTUM LINEAL

11.2 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Si $\sum \overrightarrow{\mathrm{Imp}}_{1\rightarrow 2} = 0$

$$\sum m\vec{v}_1 + \cancel{\sum \overrightarrow{\mathrm{Imp}}_{1\rightarrow 2}} = \sum m\vec{v}_2$$

$$\sum m\vec{v}_1 = \sum m\vec{v}_2$$

"La cantidad de movimiento total de las partículas se conserva"

12. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y DEL MOMENTUM ANGULAR

Recordando que la cantidad de movimiento angular es $\overline{Ho} = \overline{r} \times m\overline{v}$ y su tasa de cambio $\dot{\overline{H}}o = \sum \overline{M}o$. Integrando respecto a t:

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{M}_o\right)_i dt}_{} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\overline{H}}_o \, dt = \overline{H}_o\Big|_{t_1}^{t_2} = \left(\overline{H}_o\right)_2 - \left(\overline{H}_o\right)_1 = \Delta \overline{H}_o$$

Representa la suma de los **impulsos angulares** que producen las fuerzas externas respecto al origen.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{M}_o\right)_i dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_i \times m\overline{v}_i\right)_2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_i \times m\overline{v}_i\right)_1}$$

Principio del Impulso y la Cantidad de Movimiento Angular

12. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y DEL MOMENTUM ANGULAR

12.1 CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM ANGULAR

Si no existen fuerzas externas actuando sobre la o las partículas:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{M}_o\right)_i dt = 0 \Rightarrow \left(\overline{H}_o\right)_2 - \left(\overline{H}_o\right)_1 = 0 \Rightarrow \left(\overline{H}_o\right)_2 = \left(\overline{H}_o\right)_1 \Rightarrow$$

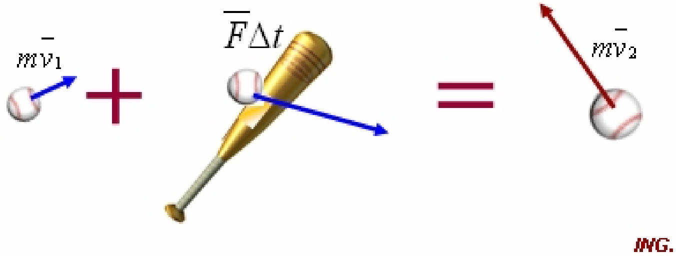
$$\overline{H}_o = \text{constante}$$

"La cantidad de movimiento angular respecto al origen, se conserva"

12. MOVIMIENTO DE IMPULSIÓN Ó MOVIMIENTO IMPULSIVO

Movimiento impulsivo, es el movimiento que resulta cuando una fuerza actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo muy corto, siendo esta fuerza tan grande que produce un cambio definido en la cantidad de movimiento y se le llama **fuerza impulsiva**.

Ejemplo: Cuando un bate golpea la pelota el impacto es súbito, ya que Δt es pequeño y F resulta ser grande, el impulso $F\Delta t$ se hace suficiente para cambiar el sentido de la pelota:



12. MOVIMIENTO DE IMPULSIÓN Ó MOVIMIENTO IMPULSIVO

Recordando el principio de impulso y cantidad de movimiento cuando actúan varias fuerzas sobre la partícula:

$$m\vec{v}_1 + \sum \overrightarrow{\text{Imp}}_{1\to 2} = m\vec{v}_2$$

$$\boxed{m\vec{v}_1 + \sum \overline{F}\Delta t = m\vec{v}_2}$$

Tarea: Cite varios ejemplos de Fuerzas No impulsivas.

BIBLIOGRAFÍA

R.C. HIBBELER
MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. DINÁMICA.
DECIMA EDICION. PEARSON, PRENTICE HALL.

RAMON PUELLO
LECCIONES ELEMENTALES DE DINAMÍCA.
FACULTAD DE INGENIERÍA. ULA.

FERDINAND P. BEER Y RUSSELL JOHNSTON
MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. DINAMICA. MCGRAW-HILL